RELACIÓN 3: FORMULACIÓN HAMILTONIANA

3.1- Haga uso de la formulación Hamiltoniana para obtener el movimiento de un proyectil de masa m (considerado como objeto puntual), lanzado con velocidad inicial v_0 y ángulo α respecto de la horizontal bajo la acción de la gravedad.

Solución: $$\begin{cases} x(t) = x_0 + (v_0 \cos\alpha)t \\ y(t) = y_0 + (v_0 \operatorname{sen}\alpha)t - gt^2/2 \end{cases}$$

3.2- Una partícula de masa m se puede mover un una dimensión bajo la influencia de dos resortes unidos a dos paredes separadas entre sí una distancia a. Los resortes cumplen la ley de Hooke, tienen longitudes naturales nulas y constantes elásticas k_1 y k_2, respectivamente. Determine la función Hamiltoniana del sistema.

Solución: $$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}k_1 x^2 + \frac{1}{2}k_2 (a-x)^2$$

3.3- El punto de suspensión de un péndulo simple de longitud l y masa m está obligado a moverse a lo largo de una parábola $z = ax^2$ situada en el plano vertical. Deduzca la función Hamiltoniana que rige el movimiento del péndulo y del punto de suspensión.

Solución:
$$H = \frac{1}{2}\frac{A p_x^{\,2}}{(AB-C^2)} + \frac{1}{2}\frac{B p_\theta^{\,2}}{(AB-C^2)} - \frac{C p_x p_\theta}{(AB-C^2)} + mg\left(ax^2 - l\cos\theta\right)$$
$$A = ml^2 \qquad B = m\left(1+4a^2x^2\right) \qquad C = ml\left(\cos\theta + 2ax\operatorname{sen}\theta\right)$$

3.4- Considere el sistema del problema 2.8. Obtenga su función Hamiltoniana. ¿Coincide la Hamiltoniana con la energía del sistema? ¿Es constante? Encuentre las ecuaciones canónicas de movimiento.

Solución: $$H = \frac{p_\theta^{\,2}}{2ma^2} - \frac{1}{2}ma\omega^2 \operatorname{sen}^2\theta + mga\cos\theta$$

3.5- Un cilindro uniforme de radio a y masa M se encuentra orientado verticalmente, pudiendo girar libremente en torno al eje vertical que pasa por su centro. Sobre su superficie lateral se fija un alambre con forma de hélice a lo largo del cual desliza sin rozamiento una partícula de masa m por acción de la gravedad. Utilizando un sistema de coordenadas adecuado, deduzca la función Hamiltoniana del sistema, obtenga las ecuaciones canónicas de movimiento y resuélvalas.

Solución:
$$\begin{cases} \theta(t) = \dfrac{A}{AC-B^2}\left(p_{\theta_0} t - \dfrac{1}{2} mgbt^2\right) - \dfrac{B}{AC-B^2} p_{\phi_0} t + \theta_0 \\ \phi(t) = \dfrac{C}{AC-B^2} p_{\phi_0} t - \dfrac{B}{AC-B^2}\left(p_{\theta_0} t - \dfrac{1}{2} mgbt^2\right) + \phi_0 \end{cases}$$
$$A = I + ma^2 \qquad B = ma^2 \qquad C = m\left(a^2 + b^2\right)$$

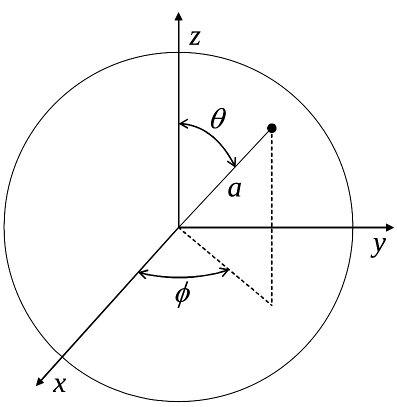
3.6- Obtenga la función Hamiltoniana, y a partir de ella deduzca las ecuaciones de movimiento para el sistema del problema 2.6.

3.7- Aplique el método de Routh para estudiar el movimiento de una partícula de masa m que se mueve en un plano bajo la influencia de una fuerza central $f(r)$ que deriva de la energía potencial $V(r)$.

Solución:
$$m\ddot{r} = -\frac{dV}{dr} + \frac{l^2}{mr^3} \quad \Rightarrow \quad r = r(r_0, \dot{r}_0, l, t)$$
$$\theta(t) = \int_0^t \frac{l}{m\left[r(t)\right]^2} + \theta_0$$

3.8- Una partícula de masa m está obligada a moverse sobre una superficie esférica de radio a, estando sometida a la acción de un potencial externo dado por la expresión:

$$V(\theta) = \frac{1}{2ma^2 \operatorname{sen}^2 \theta}$$



(a) Identifique la(s) coordenada(s) cíclica(s) y determine la expresión de la función Routhiana.
(b) Deduzca las ecuaciones de movimiento de la partícula.
(c) Compruebe que, para oscilaciones pequeñas en torno a $\theta = \pi/2$, la ecuación de movimiento corresponde a la de un oscilador armónico. Obtenga la frecuencia de dichas oscilaciones

Solución: $\begin{cases} -ma^2\ddot{\theta} + 2\dfrac{1+c_\phi{}^2}{2ma^2}\dfrac{\cos\theta}{\operatorname{sen}^3\theta} = 0 \quad \Rightarrow \quad \theta = \theta(\theta_0, \dot{\theta}_0, c_\phi, t) \\ \phi(t) = \dfrac{c_\phi{}^2}{ma^2}\displaystyle\int \dfrac{dt}{\operatorname{sen}^2\theta(t)} \end{cases}$

$$\omega = \sqrt{\frac{1+c_\phi{}^2}{m^2a^4}}$$

3.9- Use el método de Routh para eliminar las coordenadas cíclicas en el caso de un trompo simétrico que gira con el punto inferior fijo en presencia del campo gravitatorio terrestre. Derive las ecuaciones de movimiento.

Solución:

$$\text{Routhiana} \equiv R(\theta, \dot{\theta}, p_\phi, p_\psi, t) = \frac{1}{2}I_1\dot{\theta}^2 - \frac{(p_\phi - p_\psi\cos\theta)^2}{2I_1\operatorname{sen}^2\theta} - \frac{p_\psi{}^2}{2I_3} - mgh\cos\theta$$

Ec. movimiento para coordenada no cíclica, θ:

$$I_1\ddot{\theta} - \frac{(p_\phi - p_\psi\cos\theta)^2\cos\theta}{I_1\operatorname{sen}^3\theta} + \frac{p_\psi(p_\phi - p_\psi\cos\theta)}{I_1\operatorname{sen}\theta} - mgh\sin\theta = 0.$$

Para coordenada cíclica, ϕ:

$$\dot{\phi} = -\frac{(p_\phi - p_\psi\cos\theta)}{I_1\operatorname{sen}^2\theta}.$$

Para coordenada cíclica, ψ:

$$\dot{\psi} = -\frac{(p_\phi - p_\psi\cos\theta)\cos\theta}{I_1\operatorname{sen}^2\theta} + \frac{p_\psi}{I_3}.$$